Om den approximative Beregning af bestemte Integraler*).

Af Geheime-Etatsraad **Andræ.**

Det bestemte Integral:

$$\int_{g}^{g+\varDelta} y\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

hvor y er en Function af x, vil stedse, naar y og x betragtes som sædvanlige retvinklede Coordinater, kunne fremstilles ved et Areal, begrændset af x-Axen, Curven $y=f(x)$ og de to til Abscisserne g og $g+\varDelta$ svarende Ordinater. Denne geometriske Afbildning af den forelagte Function har fremkaldt en Række af mere eller mindre nøiagtige Formler, som alle give den approximative Bestemmelse af Integralet ved lineære Functioner af n Ordinater A_1, A_2, $A_3 \ldots A_n$, svarende til de n Abscisser a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$. Samtlige disse Formler fremstaae nemlig derved, at man gjennem de n Punkter af Curven, som bestemmes ved Coordinaterne a og A, tænker sig andre Curver at være dragne, hvis Arealer med Lethed lade sig beregne, og som tillige tør antages at nærme sig saa stærkt til den givne, at Forskjellen mellem de tilsvarende Arealer vil kunne betragtes som forsvindende. Ved den bekjendte Simpson'ske Formel, der stedse forudsætter n ulige, altsaa af Formen $2m+1$, idet Abscisserne bestemmes ved at dele Intervallet $\varDelta$ i et lige Antal ligestore Stykker $\frac{\varDelta}{2m}$, drager man saaledes sædvanlige Parabler af anden Grad gjennem 3 og 3 af de successivt paa hinanden følgende Punkter, og man kommer da ved Anvendelsen af de parabolske Arealer til det yderst simple Udtryk:

$$F_0 = \frac{\varDelta}{6m}\left\{A_1+4A_2+2A_3+4A_4+2A_5+\ldots\ldots+4A_{n-1}+A_n\right\} \quad (2)$$

*) meddelt den 24. Mai; see foran S. 151.

Men denne Formel, som netop ved sin store Simpelhed har erholdt en saa almindelig Udbredelse, kan dog kun tillægges en forholdsviis mindre Skarphed, da den forelagte Curve her ombyttes med en Mængde discontinueerte Curvestykker, og det tør derfor vistnok ogsaa betragtes som umiddelbart indlysende, at en langt skarpere Bestemmelse maa opnaaes ved at benytte den parabolske Curve af Graden $n-1$, der gaaer gjennem samtlige n Punkter, eller, med andre Ord, ved den af Cotes udviklede Methode, hvor $\varDelta$, ligegyldigt om n er lige eller ulige, stedse deles i et Antal af $n-1$ ligestore Stykker. For at kunne anstille en nærmere Sammenligning mellem de forskjellige Methoders gjensidige Nøiagtighed maa det imidlertid bemærkes, at Approximationerne nødvendigviis forudsætte Muligheden af at kunne udvikle Ordinaten y, mellem Grændserne g og $g+\varDelta$, i en convergent Række, ordnet efter Potentserne af Tilvæxten h, idet man før x indfører Værdien $g+h$. Man vil saaledes stedse kunne sætte:

$$y = K_0 + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

hvorved det søgte Fladeindhold F da ogsaa stedse vil nøiagtigt være fremstillet ved den convergente Række:

$$F = \varDelta \left\{ K_0 + \tfrac{1}{2} K_1 \varDelta + \tfrac{1}{3} K_2 \varDelta^2 + \tfrac{1}{4} K_3 \varDelta^3 + \ldots \right\} \ldots (4)$$

En hvilkensomhelst af de paagjældende Formler, der skulle give approximative Værdier for F, maa nu ogsaa kunne lade sig fremstille under Formen (4), og det er indlysende, at den da nødvendigviis maa have et større eller et mindre Antal af de første Led nøiagtigt sammenfaldende med de tilsvarende første Led i (4). Man vil saaledes erholde en foreløbig Maalestok for den betragtede Formels Nøiagtighed ved nærmere at angive det Led, hvor Forskjellen mellem Formelen og Rækken (4) begynder at vise sig. Ved den Simpson'ske Formel ville de første 4 Led stedse være identiske med de tilsvarende første 4 Led i Rækken (4), og Forskjellen træder her først frem ved det Led, der indeholder Coefficienten K_4. Denne Formel siges derfor at være nøiagtig indtil 4^{de} Orden excl., idet K_4 er Coefficienten af 4^{de} Orden, som oprindeligt indtraadte i (3) foran h^4. Naar Værdien af n ikke er altfor lille, vil den Cotes'iske Formel derimod være langt skarpere, da den lader Forskjellen begynde med Leddet af Ordenen n, naar n er et lige Tal, eller endogsaa af Ordenen $n+1$, naar n er ulige. Det er, saavidt vides, Gauss, som først har gjort den Bemærkning, at Delingen af $\varDelta$ i ligestore Stykker er uvæsentlig, idet man stedse, ved at lægge en Parabel af Graden $n-1$ gjennem de til n vilkaarlige Abscisser a_1, a_2, a_3 .... a_n svarende n Punkter, bestemmer Arealet med en Nøiagtighed indtil n^{te} Orden exclusive. Og herved er da ogsaa Gauss bleven ledet til Udviklingen af nye Formler, der langt overgaae alle tidligere med Hensyn til Nøiagtigheden, og som tillige kunne eftervises at give den største Skarphed, som overhovedet lader sig opnaae ved Anvendelsen af n Ordinater. I en mærkelig Afhandling, som findes i Göttinger-Videnskabernes Selskabs Skrifter for Aaret 1814 under Titelen: »*Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*«, viser Gauss nemlig, at der kan disponeres saaledes over de n vilkaarlige Abscisser a_1, a_2, a_3 .... a_n, at Arealernes Forskjel først fremtræder ved Leddet af Ordenen $2n$, og at det i Almindelighed er umuligt ved Hjælp af n Ordinater at tilveiebringe en endnu yderligere gaaende Skarphed. Derimod har denne Methode den Mangel tilfælleds med de øvrige, at den anvender n Ordinater, som nøiagtigt skulle svare til n bestemte, ved selve Formlerne nærmere angivne Abscisser. I alle de Tilfælde, hvor man er ude af Stand til directe at bestemme hvilkesomhelst Ordinater, idet man kun har givet et vist begrændset Antal af disse, eller, hvad der er det samme, hvor Curven kun er bestemt ved et vist Antal Punkter, som den skal indeholde, vil man saaledes ikke kunne gjøre Brug af nogen af de sædvanlige Methoder. Det er denne Omstændighed, der har bragt mig til nærmere at undersøge det omhandlede Problem, og da jeg herved er bleven ledet til en almindeligere og simplere

Løsning, som ganske synes at fjerne Vanskelighederne ved dets Behandling, skal jeg i det Efterfølgende meddele Hovedtrækkene af denne Undersøgelse, idet jeg dog som Indledning troer først at burde give en kort Fremstilling af selve den Gauss'iske Methode, hvorved tillige den ældre Cotes'iske vil være behandlet.

§ 1.

I den ovenfor citerede Afhandling gjør Gauss først den Bemærkning, at Integralet (1) ved Substitutionen: $x = g + \Delta t$ bringes paa den simplere Form:

$$\Delta \int_0^1 y\,dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Det kan saaledes i alle Tilfælde betragtes som tilstrækkeligt, at vise Bestemmelsen af Integralet:

$$\int_0^1 y\,dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

hvor $y = \varphi(t)$ skal forudsættes at være udviklet ved Rækken:

$$y = K_0 + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \ldots \ldots \quad (7)$$

som giver det skarpe Udtryk for det søgte Areal F:

$$F = K_0 + \tfrac{1}{2} K_1 + \tfrac{1}{3} K_2 + \tfrac{1}{4} K_3 + \ldots \ldots \quad (8)$$

Skal man nu for dette Areal finde en approximativ Værdie F_0 ved Hjælp af den parabolske Curve, som gaaer gjennem de n ved Ordinaterne A_1, A_2, $A_3 \ldots . A_n$ og Abscisserne a_1, a_2, $a_3 \ldots . a_n$ fastlagte Punkter, saa vil det først være nødvendigt at søge Ligningen for selve denne Curve. Men denne Ligning erholdes ogsaa uden al Vanskelighed ved en Anvendelse af den bekjendte Lagrange'ske Interpolationsformel. Betegner man nemlig med T_1 den hele, rationale $n-1^{\text{te}}$ Grads Function af t, som reduceres til Eenheden ved for t at indføre Værdien a_1, medens den bliver Nul ved for t at substituere de øvrige $n-1$ Værdier a_2, $a_3 \ldots a_n$, eller, med andre Ord, sætter man:

$$T_1 = \frac{(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4) \ldots . (t-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4) \ldots . (a_1-a_n)},$$

og betegner man paa lignende Maade med T_2, $T_3 \ldots . T_n$ de tilsvarende $n-1$ Functioner af t, der spille samme Rolle med Hensyn til Værdierne a_2, $a_3 \ldots . a_n$, og som fremstaae ved i T_1 at lade a_1 skifte Plads respective med a_2, $a_3 \ldots a_n$, saa vil den søgte Ligning aabenbart være fremstillet ved:

$$Y = A_1 T_1 + A_2 T_2 + A_3 T_3 + \ldots . A_n T_n \ldots . \quad (9)$$

eller kortere, naar de Gauss'iske Summategn benyttes, ved:

$$Y = [AT] \ldots \ldots \ldots \ldots . \quad (10)$$

Man har følgelig:

$$F_0 = \int_0^1 Y dt = A_1 \int_0^1 T_1 dt + A_2 \int_0^1 T_2 dt + \ldots . A_n \int_0^1 T_n dt \, .$$

Alle de her forekommende Integraler ere fuldstændigt bekjendte rationale Functioner af Værdierne a_1, a_2, $a_3 \ldots . a_n$, og de reduceres stedse til numeriske Constanter, hver Gang disse Værdier selv ere givne. Ved at indføre Betegnelserne:

$$\int_0^1 T_1 dt = R_1 \; ; \; \int_0^1 T_2 dt = R_2 \; ; \; \int_0^1 T_3 dt = R_3 \ldots . \int_0^1 T_n dt = R_n \, ,$$

faaer man saaledes nedenstaaende Udtryk for Arealet F_0:

$$F_0 = A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_3 R_3 + \ldots . . A_n R_n \; . \; . \quad (11)$$

eller kortere:

$$F_0 = [AR] \ldots \ldots \ldots \ldots . \quad (12)$$

Ved den Cotes'iske Methode ere Abscisserne a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ fremstillede ved Rækken $0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots . \frac{n-2}{n-1}, 1$, og for en hvilkensomhelst given Værdi af n erholder man saaledes let den tilsvarende Cotes'iske Formel, det vil sige Værdierne af Coefficienterne R_1, R_2, $R_3 \ldots . R_n$. Lad os til Exempel beregne disse Coefficienter for $n = 3$, hvor det er indlysende, at den Cotes'iske Formel maa falde sammen med den Simpson'ske. I dette Tilfælde har man:

$$T_1 = \frac{(t-\frac{1}{2})(t-1)}{-\frac{1}{2} \cdot -1} = 2t^2 - 3t + 1 \; ;$$

$$T_2 = \frac{t(t-1)}{\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}} = -4t^2+4t\ ;$$

$$T_3 = \frac{t(t-\frac{1}{2})}{1\cdot\frac{1}{2}} = 2t^2-t\ ;$$

altsaa:

$$R_1 = \tfrac{1}{6}\ ;\quad R_2 = \tfrac{2}{3}\ ;\quad R_3 = \tfrac{1}{6}\ ;$$

og følgelig:

$$F_0 = \frac{1}{6}\left\{A_1 + 4A_2 + A_3\right\}.$$

§ 2.

For at bestemme den Nøiagtighed, der maa tillægges den ganske almindelige Formel (11), bliver det nødvendigt at bringe Udtrykket for F_0 paa Formen (8). Man kan herved gaae tilbage til (9), idet man for A_1, A_2, $A_3 \ldots A_n$ indfører deres Udtryk ved Coefficienterne K_0, K_1, $K_2 \ldots K_n$. Ligningen (7) giver nemlig:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = K_0 + K_1 a_1 + K_2 a_1^2 + K_3 a_1^3 + \ldots. \\ A_2 = K_0 + K_1 a_2 + K_2 a_2^2 + K_3 a_2^3 + \ldots. \\ A_3 = K_0 + K_1 a_3 + K_2 a_3^2 + K_3 a_3^3 + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n = K_0 + K_1 a_n + K_2 a_n^2 + K_3 a_n^3 + \ldots. \end{array}\right\}\ \ldots (13)$$

og Formlen (9) giver da:

$$Y = K_0[T] + K_1[aT] + K_2[a^2T] + K_3[a^3T] + \ldots (14)$$

Men Functionerne T ere i Besiddelse af en meget mærkelig Egenskab, hvorpaa deres Anvendelse egentlig beroer, og skjøndt jeg ikke mindes nogetsteds at have seet denne Egenskab udtrykkeligt fremhævet, vil den dog med største Lethed kunne eftervises. Forudsætter man nemlig for et Øieblik, at den forelagte Curve selv er en $n-1^{\text{te}}$ Grads Parabel, som gaaer gjennem de n ved Coordinaterne a og A bestemte Punkter, saa maae Rækkerne (7) og (14) bryde af med det n^{te} Led, der indeholder Coefficienten K_{n-1}, idet alle de paafølgende Coefficienter, begyndende med K_n, blive Nul. Men det er tillige indlysende, at begge de ved (7) og (14) fremstillede Curver her falde sammen. Rækkerne (7) og (14) blive saaledes identiske, og man vil da i dette Tilfælde have Ligningerne:

$$[T] = 1\,;\ [aT] = t\,;\ [a^2T] = t^2\,;\ldots\ldots[a^{n-1}T] = t^{n-1}\,.\quad (15)$$

Da Functionerne T ere fuldkommen uafhængige af den forelagte Curves Natur, følger imidlertid heraf, at Ligningerne (15) stedse ville være fyldestgjorte, og Formel (9) vil saaledes i alle mulige Tilfælde kunne skrives:

$$Y = K_0 + K_1 t + K_2 t^2 \ldots\ldots + K_{n-1} t^{n-1} + K_n[a^nT] + K_{n+1}[a^{n+1}T] + \ldots\ldots$$

som atter giver:

$$F_0 = \int_0^1 Y dt = K_0 + \tfrac{1}{2}K_1 + \tfrac{1}{3}K_2 + \ldots \frac{1}{n}K_{n-1} + K_n[a^nR] + K_{n+1}[a^{n+1}R] + \ldots \quad (16)$$

Ganske uafhængigt af de Værdier, der tillægges Abscisserne $a_1\,,\ a_2\,,\ a_3 \ldots a_n\,,$ vil Formlen (11) derfor stedse være nøiagtig indtil n^{te} Orden exclusive, idet de n første Led i dens Udvikling (16) falde sammen med de tilsvarende Led i (8). Forskjellen kan først fremtræde mellem Leddene $K_n[a^nR]$ og $\frac{1}{n+1}K_n$, men det er aabenbart, at den ikke stedse behøver at vise sig netop paa dette Sted, da Abscissernes Værdier i givne specielle Tilfælde meget vel kunne bevirke, at man ogsaa faaer $[a^nR] = \frac{1}{n+1}$. Som tidligere anført vil dette altid indtræde saavel ved den Simpson'ske Formel som ved de Cotes'iske, naar n er ulige, og man finder saaledes ogsaa for det i Slutningen af foregaaende Paragraph behandlede Exempel, hvor man havde $n = 3$:

$$[a^nR] = (0)^3 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} + (1)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4} = \frac{1}{n+1}\,.$$

§ 3.

Kan man frit disponere over samtlige n Abscisser, saa vil man ganske almindeligt kunne fyldestgjøre de n Ligninger:

$$[a^nR] = \frac{1}{n+1}\,;\ [a^{n+1}R] = \frac{1}{n+2}\,;\ldots\ldots[a^{2n-1}R] = \frac{1}{2n}\,;\ldots\ldots (17)$$

hvor Ligningernes venstre Sider ere bekjendte, rationale og symmetriske Functioner af Værdierne a_1, a_2, $a_3 \ldots . a_n$. Man kommer herved til de omhandlede Gauss'iske Formler, i hvilke de $2n$ første Led stedse falde sammen med de tilsvarende Led i (8), og som derfor ogsaa alle ville være nøiagtige indtil Ordenen $2n$ exclusive. For nærmere at oplyse de ved Formlernes Udledelse forefaldende Regninger, skulle vi ogsaa her behandle et meget simpelt Exempel, idet vi tage $n = 2$, som giver:

$$T_1 = \frac{t - a_2}{a_1 - a_2} \; ; \quad T_2 = \frac{t - a_1}{a_2 - a_1} \; .$$

Man verificerer let Rigtigheden af de to første af Ligningerne (15), som her skulle være tilfredsstillede, nemlig:

$$[T] = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_2} = 1 \; ; \quad [aT] = \frac{t(a_1 - a_2)}{a_1 - a_2} = t \; .$$

Endvidere faaer man:

$$R_1 = \int_0^1 T_1 dt = \frac{\frac{1}{2} - a_2}{a_1 - a_2} \; ; \quad R_2 = \int_0^1 T_2 dt = \frac{\frac{1}{2} - a_1}{a_2 - a_1} \; ;$$

Altsaa:

$$[a^n R] = \frac{\frac{1}{2} a_1^2 - a_1^2 a_2}{a_1 - a_2} + \frac{\frac{1}{2} a_2^2 - a_1 a_2^2}{a_2 - a_1} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) - a_1 a_2 \; .$$

$$[a^{n+1} R] = \frac{\frac{1}{2} a_1^3 - a_1^3 a_2}{a_1 - a_2} + \frac{\frac{1}{2} a_2^3 - a_1 a_2^3}{a_2 - a_1} = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2) - a_1 a_2 (a_1 + a_2) \; .$$

I nærværende Tilfælde reduceres derfor Ligningerne (17) til de to efterfølgende:

$$a_1 + a_2 - 2 a_1 a_2 = \frac{2}{3} \; ;$$

$$a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 (a_1 + a_2) = \frac{1}{2} \; .$$

Subtraheres den anden af disse Ligninger fra den første, efterat denne er multipliceret med $a_1 + a_2$, erholdes:

$$a_1 a_2 = \frac{2}{3}(a_1 + a_2) - \frac{1}{2} \; ,$$

som combineret med den uforandrede første Ligning giver:

$$a_1 + a_2 = 1 \; ; \quad a_1 a_2 = \frac{1}{6} \; .$$

Abscisserne a_1 og a_2 ere saaledes Rødder i den qvadratiske Ligning:

$$t^2 - t + \frac{1}{6} = 0 \ ,$$

og man faaer følgelig:

$$a_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}} \ ; \quad a_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}} \ ;$$

som atter give:

$$R_1 = \frac{1}{2} \ ; \quad R_2 = \frac{1}{2} \ ;$$

hvorved selve den Gauss'iske Formel bliver:

$$F_0 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \ .$$

Af dette Exempel vil man imidlertid see, at Regningerne for større Værdier af n kunne blive vidtløftige nok, hvorfor også Gauss i den anførte Afhandling fortrinsviis beskjæftiger sig med Udviklingen af meget sindrige Methoder, ved hvilke man directe finder Ligningen af n^{te} Grad, hvori samtlige n Abscisser indtræde som Rødder. Vi skulle dog ikke her opholde os længere ved disse Undersøgelser, da den omhandlede Lignings Bestemmelse ogsaa med Lethed vil kunne erholdes ved den simplere og mere almindelige Behandling af Problemet, som vi nu gaae over til at meddele.

§ 4.

Naar et almindeligt analytisk Problem uden Tvang lader sig forvandle til et geometrisk, vil denne Forvandling ofte medføre væsentlige Fordele, idet Gjenstanden herved bringes til at fremtræde med en umiddelbar Anskuelighed, der letter Behandlingen og i mangfoldige Tilfælde gjør Opdagelsen af den søgte Løsning mindre vanskelig. Men ogsaa fra denne almindelige Regel gives der ikke faa Undtagelser. Man kan nemlig meget vel tænke sig, at enkelte, og maaskee netop de simpleste Løsninger, ved en saadan Omdannelse kunne tabes, fordi de mindre egne sig til at overføres i den billedlige Form, hvor de ligesom skjule sig for Betragtningen. I nærværende Tilfælde er Problemets geometriske Betydning saa iøinefaldende, at den vel maa siges med Nødvendighed at paatvinge sig, og i den billedlige Gjengivelse fremtræde tillige Løsningerne med saa stor Lethed, at det vistnok kun kan betragtes som i høieste Grad naturligt, naar Mathematikerne fortrinsviis have behandlet Opgaven som en reen geometrisk, ved hvilken det forelagte Integral umiddelbart ombyttes med det tilsvarende Fladeindhold. Og dog vil det Efterfølgende kunne vise, at det netop er den fuldstændige Opgivelse af denne Betragtningsmaade, som fører ind paa en Vei, hvor Løsningen uden al Vanskelighed og næsten umiddelbart frembyder sig i dens meest almindelige Form.

Idet vi derfor ganske skulle bortsee fra den geometriske Betydning af Integralet, ville vi først bemærke, at det i (1) er langt fordeelagtigere at sætte $x = g + \frac{1}{2}\Delta + \Delta t$ end $x = g + \Delta t$. Man erholder herved nemlig:

$$\int_g^{g+\Delta} y dx = \Delta \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

hvor Alt nu blot kommer an paa Bestemmelsen af:

$$F = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Ligesom før ville vi endvidere antage:

$$y = K_0 + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \ldots\ldots (20)$$

som her giver:

$$F = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y dt = K_0 + \frac{1}{3 . 2^2} K_2 + \frac{1}{5 . 2^4} K_4 + \frac{1}{7 . 2^6} K_6 + \ldots (21)$$

Har man nu givet de til følgende n Værdier af den uafhængige Variable t, nemlig:

$$a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n,$$

svarende n Værdier af Functionen y, nemlig respective:

$$A_1, A_2, A_3 \ldots . A_n,$$

og skal F bestemmes ved disse Værdier alene, saa vil den meest almindelige lineære Function, der herved kan finde Anvendelse, være fremstillet ved:

$$F_0 = A_1R_1 + A_2R_2 + A_3R_3 + \ldots\ldots + A_nR_n = [AR] \ldots \quad (22)$$

hvor Størrelserne R_1, R_2, $R_3 \ldots R_n$ foreløbigt kun maae betragtes som ubekjendte Coefficienter, hvis Værdier nærmere ville være at fastsætte.

Men ifølge (20) har man ogsaa her:

$$\begin{aligned}
A_1 &= K_0 + K_1a_1 + K_2a_1^2 + K_3a_1^3 + \ldots\ldots \\
A_2 &= K_0 + K_1a_2 + K_2a_2^2 + K_3a_2^3 + \ldots\ldots \\
A_3 &= K_0 + K_1a_3 + K_2a_3^2 + K_3a_3^3 + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_n &= K_0 + K_1a_n + K_2a_n^2 + K_3a_n^3 + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

og multipliceres disse Ligninger efter Ordenen respective med R_1, R_2, $R_3 \ldots R_n$, giver deres Sum:

$$F_0 = [AR] = [R]K_0 + [aR]K_1 + [a^2R]K_2 + [a^3R]K_3 + \ldots\ldots$$

som subtraheret fra (21) atter giver:

$$F - F_0 = k_0K_0 + k_1K_1 + k_2K_2 + k_3K_3 + \ldots\ldots \quad (23)$$

idet vi herved indføre Betegnelserne:

$$\left.\begin{aligned}
k_0 &= 1 - [R] \;; & k_1 &= -[aR] \;; \\
k_2 &= \frac{1}{3.2^2} - [a^2R] \;; & k_3 &= -[a^3R] \;; \\
k_4 &= \frac{1}{5.2^4} - [a^4R] \;; & k_5 &= -[a^5R] \;; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \ldots \quad (24)$$

Ligningerne (23) og (24) indeholde nu hele det nødvendige Grundlag for Behandlingen af Problemets forskjellige Løsninger og for Besvarelsen af alle de hermed i Forbindelse staaende Spørgsmaal. I ethvert givet Tilfælde, hvor man ved Formel (22) vil opnaae et Maximum af Skarphed, maa Differentsen $F - F_0$ reduceres til et Minimum, og man maa saaledes i Rækkeudviklingen for denne Differents bringe det størst mulige Antal af Rækkens første Led til at forsvinde. Men samtlige Coefficienter k_0, k_1, k_2, $k_3 \ldots\ldots$ ere symmetriske hele og rationale Functioner af Størrelserne a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ og R_1, R_2, $R_3 \ldots R_n$.

Kan man derfor frit disponere over alle disse $2n$ Størrelser, vil man ogsaa kunne bringe de $2n$ første Coefficienter paa Nul, og Integralet bestemmes da med en Nøiagtighed, der gaaer indtil Ordenen $2n$ exclusive, idet Rækken (23) først begynder med Leddet $+k_{2n} K_{2n}$. Ere derimod μ af de omhandlede Størrelser forud givne, saa kan man kun fyldestgjøre $2n-\mu$ af Ligningerne (24), og Differentsen vil da i Almindelighed maatte begynde med Leddet af Ordenen $2n-\mu$. Det kan imidlertid herved indtræffe, at de givne Værdiers eiendommelige Beskaffenhed medfører en endnu videre gaaende Skarphed, og dette finder t. Ex. Sted ved de Cotes'iske Formler, hvor de n Værdier af a ere givne, og hvor Differentsen, naar n er ulige, først begynder med Leddet af Ordenen $n+1$.

§ 5.

Den skarpeste og meest omfattende Løsning af Problemet erholdes ved Hjælp af de Gauss'iske Formler, hvor samtlige $2n$ Værdier af a og R blive bestemte paa en saadan Maade, at de $2n$ første Coefficienter k, fra k_0 til k_{2n-1} inclusive, bringes til at forsvinde. Ved Udledelsen af disse Formler maa man skjælne mellem de to Tilfælde, hvor man enten har n lige, eller n ulige. Er n lige, eller:

$$n = 2m,$$

saa er det indlysende, at de $2m$ Ligninger:

$$\left.\begin{array}{l} a_{m+1} = -a_1\,;\quad a_{m+2} = -a_2\,;\quad a_{m+3} = -a_3\,;\,\ldots\ldots a_{2m} = -a_m\,; \\ R_{m+1} = R_1\,;\quad R_{m+2} = R_2\,;\quad R_{m+3} = R_3\,;\,\ldots\ldots R_{2m} = R_m\,; \end{array}\right\} \quad \ldots (25)$$

umiddelbart bringe alle Coefficienter k med ulige Indices til at forsvinde i hele Rækkeudviklingen (23), idet man herved faaer:

$$[aR] = 0\,;\quad [a^3 R] = 0\,;\quad [a^5 R] = 0 \ldots\ldots$$

for alle ulige Potentser af Størrelserne a. Værdierne a_1, a_2, $a_3 \ldots\ldots a_m$ og R_1, R_2, $R_3 \ldots\ldots R_m$ kunne da bestemmes ved de $2m$ Ligninger:

$$k_0 = 0\,;\quad k_2 = 0\,;\quad k_4 = 0\,;\,\ldots\ldots k_{4m-2} = 0\,.$$

som bringer Rækken (23) til at begynde med Leddet $+k_{4m}K_{4m}$ $= + k_{2n}K_{2n}$.

Har man derimod n ulige, eller:

$$n = 2m + 1 \quad ,$$

og føier man til de anførte $2m$ Ligninger (25) endnu Ligningen:

$$a_{2m+1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

saa forsvinder ogsaa i dette Tilfælde alle Leddene med de ulige Indices for k, og man maa da bestemme de tilbageblivende m Værdier af a og $m+1$ Værdier af R, ved de $2m+1$ Ligninger:

$$k_0 = 0 \; ; \quad k_2 = 0 \; ; \quad k_4 = 0 \; ; \; \ldots \ldots \; k_{4m} = 0 \; ,$$

som atter bringer Rækken (23) til at begynde med Leddet: $k_{4m+2}K_{4m+2} = + k_{2n}K_{2n}$.

Den gjennemgaaende Symmetrie ved Bestemmelsen af Størrelserne a og R, der finder sit Udtryk i Ligningerne (25) og (26), viser sig ikke blot ved de Gauss'iske Formler, men ogsaa ved mangfoldige andre, især hvor Værdierne af a ikke forud ere givne. Ved Behandlingen af disse Formler skulle vi derfor overalt i det Følgende, naar det Modsatte ikke udtrykkeligt siges, vælge Betegnelserne saaledes, at a_1, a_2, $a_3 \ldots . a_m$ efter Ordenen angive de m positive Værdier af a mellem 0 og $+\frac{1}{2}$, hvorved da ogsaa de med disse numerisk ligestore, negative Værdier efter Ordenen ville være betegnede med a_{m+1}, a_{m+2}, $a_{m+3} \ldots . a_{2m}$, medens selve Værdien Nul, der fremkommer hver Gang n er ulige, stedse skal betegnes med a_{2m+1}.

Sætter man i begge de her behandlede Tilfælde endvidere:

$$a_1^2 = q_1 \; ; \quad a_2^2 = q_2 \; ; \quad a_3^2 = q_3 \; ; \; \ldots . \; a_m^2 = q_m \quad . \; . \; (27)$$

og lader man de sædvanlige Summategn [ ] fra nu af betegne Summerne ikke af n, men af m Led, saa erholdes, foruden (25) og (26), til Bestemmelsen af Størrelserne a og R, naar n er lige, altsaa:

$$n = 2m \quad ,$$

de efterfølgende $2m$ Ligninger:

$$[R] = \frac{1}{2}; \;\; [qR] = \frac{1}{3 \, . \, 2^3}; \;\; [q^2R] = \frac{1}{5 \, . \, 2^5}; \ldots . [q^{2m-1}R] = \frac{1}{(4m-1) \, 2^{4m-1}} \ldots (28)$$

og ligeledes, naar:

$$n = 2m + 1 \quad ,$$

de $2m+1$ Ligninger:

$$\left.\begin{array}{l} R_{2m+1} = 1 - 2[R] \; ; \quad [qR] = \dfrac{1}{3 \, . \, 2^3} \; ; \quad [q^2R] = \dfrac{1}{5 \, . \, 2^5} \; ; \; \ldots \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; [q^{2m}R] = \dfrac{1}{(4m+1) \, . \, 2^{4m+1}} \end{array}\right\} \ldots (29)$$

I dette sidste Tilfælde indtræder R_{2m+1} kun i den første af Ligningerne og maa følgelig bestemmes ved denne, det vil sige ved $[R]$. Værdierne $q_1, q_2, q_3 \ldots q_m$ og $R_1, R_2, R_3 \ldots R_m$ findes saaledes i begge Tilfælde ved $2m$ Ligninger, som alle ere lineære med Hensyn til Størrelserne R, og som derfor stedse med Lethed reduceres til m Ligninger, der blot indeholde Størrelserne q. Disse m Ligningers eiendommelige Form vil tillige gjøre det let at finde den ene Ligning af m^{te} Grad, hvori samtlige m Værdier af q indtræde som Rødder. Lad os til nærmere Oplysning heraf tage et specielt Exempel og sætte $n = 5$, altsaa $m = 2$. De $2m$ Ligninger blive da:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 R_1 + q_2 R_2 = \dfrac{1}{24} \; ; \\ q_1^2 R_1 + q_2^2 R_2 = \dfrac{1}{160} \; ; \\ q_1^3 R_1 + q_2^3 R_2 = \dfrac{1}{896} \; ; \\ q_1^4 R_1 + q_2^4 R_2 = \dfrac{1}{4608} \; ; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (30)$$

Elimineres successive R_1 af 2 og 2 paa hinanden følgende Ligninger erholdes:

$$q_2(q_1 - q_2)R_2 = \frac{1}{24} q_1 - \frac{1}{160} \; ;$$

$$q_2^2(q_1 - q_2)R_2 = \frac{1}{160} q_1 - \frac{1}{896} \; ;$$

$$q_2^3(q_1 - q_2)R_2 = \frac{1}{896} q_1 - \frac{1}{4608} \; ;$$

Og bortskaffes dernæst R_2 paa lignende Maade:

$$0 = \frac{1}{24} q_1 q_2 - \frac{1}{160}(q_1 + q_2) + \frac{1}{896} \; ;$$

$$0 = \frac{1}{160} q_1 q_2 - \frac{1}{896}(q_1 + q_2) + \frac{1}{4608} \; .$$

Naar Ligningen af 2den Grad, hvori q_1 og q_2 indtræde som Rødder, betegnes med:

$$q^2 + c_1 q + c_2 = 0\ ,$$

har man følgelig:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{24}c_2 + \frac{1}{160}c_1 + \frac{1}{896} = 0 \\ \frac{1}{160}c_2 + \frac{1}{896}c_1 + \frac{1}{4608} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

som give:

$$c_1 = -\frac{5}{18}\ ; \quad c_2 = +\frac{5}{336}\ .$$

q_1 og q_2 ere saaledes Rødderne i den qvadratiske Ligning:

$$q^2 - \frac{5}{18}q + \frac{5}{336} = 0\ ,$$

altsaa:

$$q_1 = \frac{1}{36}\left\{5 - \sqrt{\frac{40}{7}}\right\}\ ; \quad q_2 = \frac{1}{36}\left\{5 + \sqrt{\frac{40}{7}}\right\}\ ;$$

og dernæst:

$$R_1 = \frac{322 + 13\sqrt{70}}{1800}\ ; \quad R_2 = \frac{322 - 13\sqrt{70}}{1800}\ ; \quad R_5 = \frac{512}{1800}\ .$$

eller endelig:

$$a_1 = +0{,}2692347\ ; \quad a_3 = -0{,}2692347\ ;$$
$$a_2 = +0{,}4530899\ ; \quad a_4 = -0{,}4530899\ ;$$
$$a_5 = 0\ ;$$

samt:

$$R_1 = R_3 = 0{,}2393143\ ;$$
$$R_2 = R_4 = 0{,}1184634\ ;$$
$$R_5 = 0{,}2844444\ .$$

Dersom man ved samme Værdie for m havde n lige, altsaa her $n = 4$, vilde Ligningerne (30) være at ombytte med følgende fire:

$$\left.\begin{aligned} R_1 + R_2 &= \frac{1}{2}\ ; \\ q_1 R_1 + q_2 R_2 &= \frac{1}{24}\ ; \\ q_1^2 R_1 + q_2^2 R_2 &= \frac{1}{160}\ ; \\ q_1^3 R_1 + q_2^3 R_2 &= \frac{1}{896}\ ; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Men selve Eliminationen af R_1 og R_2 gaaer dog atter ganske uforandret, Skridt for Skridt, paa samme Maade som tidligere, og det endelige Resultat, eller Systemet, der svarer til (31), vil derfor ogsaa umiddelbart kunne nedskrives. Til Bestemmelsen af Coefficienterne i den søgte qvadratiske Ligning erholder man saaledes nu:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} c_2 + \frac{1}{24} c_1 + \frac{1}{160} = 0 \\ \frac{1}{24} c_2 + \frac{1}{160} c_1 + \frac{1}{896} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (33)$$

Vilde man til Sammenligning med det Foregaaende ogsaa behandle det i Slutningen af § 3 benyttede Exempel, saa har man her $n = 2$, altsaa $m = 1$, og Systemet (32) indskrænkes da til de to Ligninger:

$$R_1 = \frac{1}{2} \;;$$

$$q_1 R_1 = \frac{1}{24} \;;$$

som umiddelbart give:

$$a_1 = +\sqrt{\frac{1}{12}} \;; \quad a_2 = -\sqrt{\frac{1}{12}} \;;$$

$$R_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad R_2 = \frac{1}{2} \quad ;$$

hvor Værdierne af a, efter den forandrede Betydning af t, naturligviis maae fremtræde formindskede med $\frac{1}{2}$.

§ 6.

Uagtet det for en hvilkensomhelst Værdie af m er meget let at opdage den almindelige Lov, som gjør sig gjældende ved den successive Elimination af Størrelserne R_1, R_2, $R_3 \ldots R_m$, og som stedse vil gjøre det muligt umiddelbart at kunne nedskrive det til (31) eller (33) svarende System af m Ligninger, saa skulle vi dog endnu vise, hvorledes disse Ligninger directe lade sig udlede paa en herfra ganske forskjellig og overordentlig simpel Maade.

Ligningen af m^{te} Grad, hvori $q_1, q_2, q_3 \ldots q_m$ skulle indtræde som Rødder, ville vi ganske almindeligt betegne med:

$$q^m + c_1 q^{m-1} + c_2 q^{m-2} \ldots\ldots + c_m = 0 ,$$

eller, som vi her foretrække at skrive den:

$$c_m + c_{m-1} q + c_{m-2} q^2 \ldots\ldots + c_1 q^{m-1} + q^m = 0 \ldots\ldots (34)$$

Substituerer man nu successive i (34) Rødderne $q_1, q_2, q_3 \ldots q_m$, og multipliceres de herved erholdte Ligninger efter Ordenen med respective $R_1, R_2, R_3 \ldots R_m$, saa vil Additionen af samtlige m Produkter give Summen:

$$c_m[R] + c_{m-1}[qR] + c_{m-2}[q^2R] \ldots\ldots + c_1[q^{m-1}R] + [q^mR] = 0 .$$

Men ifølge (28) vil denne Sum for alle lige Værdier af n kunne skrives:

$$b_0 c_m + b_1 c_{m-1} + b_2 c_{m-2} \ldots\ldots + b_{m-1} c_1 + b_m = 0 ,$$

idet vi til Forkortelse betegne Værdierne:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3.2^3}, \frac{1}{5.2^5}, \frac{1}{7.2^7} \ldots\ldots \frac{1}{(2m+1)\,2^{2m+1}} \ldots\ldots$$

respective med:

$$b_0 , b_1 , b_2 , b_3 \ldots\ldots b_m \ldots\ldots$$

Herved har man da fundet den første af de søgte m Ligninger, der skulle tjene til Bestemmelsen af Coefficienterne c_1, $c_2, c_3 \ldots\ldots c_m$, og de øvrige $m-1$ kunne aabenbart erholdes paa lignende Maade ved at gjentage de samme Operationer $m-1$ Gange, efterat man hver Gang først har multipliceret (34) respective med $q, q^2, q^3 \ldots\ldots q^{m-1}$. For $n = 2m$ ville samtlige m Ligninger saaledes stedse være fremstillede ved Systemet:

$$\left.\begin{array}{l} b_0 c_m + b_1 c_{m-1} + b_2 c_{m-2} \ldots\ldots + b_{m-1} c_1 + b_m = 0 \\ b_1 c_m + b_2 c_{m-1} + b_3 c_{m-2} \ldots\ldots + b_m c_1 + b_{m+1} = 0 \\ b_2 c_m + b_3 c_{m-1} + b_4 c_{m-2} \ldots\ldots + b_{m+1} c_1 + b_{m+2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m-1} c_m + b_m c_{m-1} + b_{m+1} c_{m-2} \ldots + b_{2m-2} c_1 + b_{2m-1} = 0 \end{array}\right\} \ldots (35)$$

som for $m = 2$ umiddelbart giver:

$$\frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{24}c_1 + \frac{1}{160} = 0 \ ,$$

$$\frac{1}{24}c_2 + \frac{1}{160}c_1 + \frac{1}{896} = 0 \ ,$$

eller det i foregaaende Paragraph med (33) betegnede System.

Er n derimod ulige, maa man, ifølge (29), udelade den første af disse Ligninger, og Systemet fuldstændiggjøres da ved Tilføielsen af en sidste Ligning, som erholdes ved at fortsætte de ovenfor omhandlede Multiplicationer af (34) indtil Potentsen q^m inclusive. For $n = 2m + 1$ faaer man saaledes:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 c_m + b_2 c_{m-1} + b_3 c_{m-2} \ldots\ldots + b_m\, c_1 + b_{m+1} = 0 \\ b_2 c_m + b_3 c_{m-1} + b_4 c_{m-2} \ldots\ldots + b_{m+1} c_1 + b_{m+2} = 0 \\ b_3 c_m + b_4 c_{m-1} + b_5 c_{m-2} \ldots\ldots + b_{m+2} c_1 + b_{m+3} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_m c_m + b_{m+1} c_{m-1} + b_{m+2} c_{m-2} \ldots + b_{2m-1} c_1 + b_{2m} = 0 \end{array}\right\} \ldots (36)$$

hvor man ligeledes for $m = 2$ umiddelbart erholder Systemet (31).

Ligningerne (35) og (36) ere af en saa simpel Form, at man let indseer Muligheden af directe at kunne udtrykke selve Coefficienterne c_1, c_2, $c_3 \ldots . c_m$ ved Værdierne af m eller n, men disse Udtryk kunne neppe tillægges nogen Betydning for Anvendelserne, hvor m, der hos Gauss aldrig overstiger 3, stedse vil være et meget lille Tal. I 1ste Bind af Crelle's Journal har Jacobi udviklet en høist sindrig Methode for Bestemmelsen af n^{te} Grads Ligningen i t, som svarer til den af Gauss benyttede Substitution $x = g + \Delta t$. Ved Hjælp af denne Methode finder man ogsaa nedenstaaende elegante Udtryk for den tilsvarende Ligning ved den her anvendte Substitution $x = g + \frac{1}{2}\Delta + \Delta t$:

$$\frac{d^n . (t^2 - \frac{1}{4})^n}{dt} = 0 \ .$$

I det første af de Exempler, der behandles i foregaaende Paragraph, har man saaledes for $n = 5$:

$$\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^5 = t^{10} - \frac{5}{4}t^8 + \frac{10}{16}t^6 - \ldots\ldots$$

idet man aabenbart kun behøver at udvikle Leddene til t^6 inclusive. Den 5 Gange gjentagne Differentiation giver da:

$$10.9.8.7.6.t^5 - 8.7.6.5.4.\frac{5}{4}t^3 + 6.5.4.3.2.\frac{10}{16}t = 0 \ ,$$

eller:

$$t^5 - \frac{5}{18}t^3 + \frac{5}{336}t = 0 \ ;$$

altsaa ganske som tidligere:

$$t\left(q^2 - \frac{5}{18}q + \frac{5}{336}\right) = 0 \ ;$$

§ 7.

Naar man først har udviklet den meest almindelige Løsning, ved hvilken der frit kan disponeres over samtlige Værdier af a og af R, vil det være meget let at behandle alle de specielle Tilfælde, hvor et større eller et mindre Antal af disse Værdier forudsættes at være givne. Det simpleste af de mangfoldige Problemer, som herved kunne fremstaae, er upaatvivleligt det tidligere fremhævede, hvor de n Værdier af a ere givne, hvad enten dette nu hidrører fra den Omstændighed, at man ved Valget af Størrelserne a skal følge en vis bestemt Lov, eller derfra, at kun n forud givne Værdier af Functionen y ere bekjendte, hvilket — for atter at benytte det geometriske Billede — netop vil finde Sted, naar Curven $y = \varphi(t)$ kun er bestemt ved n givne Punkter, som den skal indeholde. I dette Tilfælde vil man altsaa kun have n Værdier af R, hvorover der kan disponeres, og man maa saaledes indskrænke sig til at opnaae en Nøiagtighed, der gaaer indtil n^{te} Orden exclusive, idet man kun kan fyldestgjøre de n Ligninger, som bringe de n første Coefficienter i Rækken (23) til at forsvinde. Til Bestemmelsen af R_1, R_2, R_3 .... R_n faaer man da stedse Systemet:

$$\left.\begin{array}{l} R_1 + R_2 + R_3 \ldots\ldots + R_n = 1 \ ; \\ a_1R_1 + a_2R_2 + a_3R_3 \ldots\ldots + a_nR_n = 0 \ ; \\ a_1^2R_1 + a_2^2R_2 + a_3^2R_3 \ldots\ldots + a_n^2R_n = \dfrac{1}{3.2^2} \ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-1}R_1 + a_2^{n-1}R_2 + a_3^{n-1}R_3 \ldots + a_n^{n-1}R_n = c \ ; \end{array}\right\} \ldots (37)$$

hvor man i sidste Ligning for n lige har $c = 0$, men derimod for n ulige $c = \frac{1}{n\,2^{n-1}}$. Da samtlige Ligninger ere af den simpleste lineære Form, vil Løsningen være overmaade let, og i Henhold til de tidligere Udviklinger i § 5 vil man endogsaa umiddelbart kunne nedskrive de n transformerede Ligninger, som successivt give Bestemmelsen af de n søgte Størrelser.

Af de her behandlede Formler danne de Cotes'iske en Klasse for sig, ved hvilken de givne Værdier af a ere bestemte paa en særegen Maade, som stedse tillader at fyldestgjøre Ligningerne (25) og tillige, forsaavidt n er ulige, Ligningen (26). Samtlige Led med de ulige Indices bringes herved til at forsvinde i Rækkeudviklingen (23), og selve Opgaven reduceres da til Bestemmelsen af de m Værdier R_1, R_2, $R_3 \ldots . R_m$. For $n = 2m$ fremstilles endvidere a_1, $a_2 \ldots a_m$ efter Ordenen ved Rækken:

$$\frac{1}{4m-2}, \quad \frac{3}{4m-2}, \quad \frac{5}{4m-2} \cdots\cdots \frac{2m-1}{4m-2},$$

og i dette Tilfælde faaer man saaledes Løsningen ved Hjælp af Ligningerne:

$$\left.\begin{aligned}
&R_1 + R_2 + R_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + R_m = \frac{1}{1.2}; \\
&R_1 + 3^2 R_2 + 5^2 R_3 \ldots\ldots\ldots + (2m-1)^2 R_m = \frac{(2m-1)^2}{3.2}; \\
&R_1 + 3^4 R_2 + 5^4 R_3 \ldots\ldots\ldots + (2m-1)^4 R_m = \frac{(2m-1)^4}{5.2}; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&R_1 + 3^{2m-2} R_2 + 5^{2m-2} R_3 \ldots\ldots + (2m-1)^{2m-2} R_m = \frac{(2m-1)^{2m-2}}{(2m-1).2}.
\end{aligned}\right\} \ldots (38)$$

For $n = 2m+1$ forandres ovenstaaende Række derimod til:

$$\frac{1}{2m}; \quad \frac{2}{2m}; \quad \frac{3}{2m} \cdots\cdots \frac{m}{2m};$$

og de m Ligninger blive da:

$$\left.\begin{array}{l} R_1 + 2^2 R_2 + 3^2 R_3 \ldots\ldots + m^2 R_m = \dfrac{m^2}{3.2}\ ; \\ R_1 + 2^4 R_2 + 3^4 R_3 \ldots\ldots + m^4 R_m = \dfrac{m^4}{5.2}\ ; \\ R_1 + 2^6 R_2 + 3^6 R_3 \ldots\ldots + m^6 R_m = \dfrac{m^6}{7.2}\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_1 + 2^{2m} R_2 + 3^{2m} R_3 \ldots\ldots + m^{2m} R_m = \dfrac{m^{2m}}{(2m+1).2}\ ; \end{array}\right\} \ldots (39)$$

idet man tillige har:

$$R_{2m+1} = 1 - 2\left\{R_1 + R_2 + R_3 + \ldots\ldots + R_m\right\} \ldots\ldots (40)$$

Lad os til Exempel bestemme den Cotes'iske Formel for $n = 7$. Man har da $m = 3$, og Ligningerne (39) blive:

$$R_1 + 4R_2 + 9R_3 = \frac{3}{2}\ ;$$

$$R_1 + 16R_2 + 81R_3 = \frac{81}{10}\ ;$$

$$R_1 + 64R_2 + 729R_3 = \frac{729}{14}\ ;$$

hvoraf successive erholdes:

$$R_3 = R_6 = \frac{41}{840}\ ;\quad R_2 = R_5 = \frac{9}{35}\ ;\quad R_1 = R_4 = \frac{9}{280}\ ;$$

og dernæst ifølge (40):

$$R_7 = \frac{34}{105}\ .$$

For det i § 1 behandlede Exempel, hvor $n = 3$, altsaa $m = 1$, indskrænkes Ligningerne (39) til:

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{6}\ ;$$

og (40) giver da:

$$R_3 = \frac{2}{3}\ .$$

§ 8.

Af samtlige øvrige Problemer skulle vi endnu kun behandle eet, som særskilt fortjener at fremhæves, fordi det leder til den simplest mulige Bestemmelse af det forelagte Integral. Det er nemlig aabenbart, at Formel (22) vil medføre den letteste Regning, naar alle Værdier af R ere indbyrdes ligestore. Men da den første af Ligningerne (24) viser, at man stedse maa have:

$$R_1 + R_2 + R_3 \dots + R_n = 1 \ ,$$

saa fordrer dette med Nødvendighed, at hvert enkelt R bliver ligestort med Brøken $\frac{1}{n}$, hvorved (22) reduceres til:

$$F_0 = \frac{A_1 + A_2 + A_3 \dots + A_n}{n} \dots \dots \dots (41)$$

Denne Formel bestemmer saaledes Integralet ved den simpleste lineære Function, eller ved det arithmetiske Middeltal af Værdierne A, og den graphiske Behandling af Problemet forvandler da ogsaa samtidigt det forelagte Areal til et ligestort Rectangel ved den simpleste geometriske Construction, idet (41) umiddelbart giver Høiden af dette Rectangel, som har Grundlinien Δ fælleds med selve Arealet.

Da man alt har fyldestgjort den første af Ligningerne (24), maa man nu fremdeles disponere over de n Værdier af a paa en saadan Maade, at de n Coefficienter k_1, k_2, $k_3 \dots k_n$ bringes til at forsvinde, og Formel (41) vil saaledes her erholde en Nøiagtighed, der gaaer indtil Ordenen $n+1$ exclusive. Men de givne Værdier af R gjøre det tillige muligt stedse at tilfredsstille Ligningerne (25) og (26), hvorved samtlige Led med ulige Indices bringes til at forsvinde i Rækken (23), og for lige Værdier af n vil Nøiagtigheden derfor gaae endnu een Orden videre, eller til Ordenen $n+2$ exclusive. Med Benyttelse af de i § 5 indførte Betegnelser faaer man da ogsaa til Bestemmelsen af de m søgte Værdier af q, saavel for $n = 2m$ som for $n = 2m+1$, de efterfølgende m Ligninger:

$$\left.\begin{aligned}
&q_1+q_2+q_3\ldots\ldots+q_m=\frac{n}{3.2^3}\;;\\
&q_1^2+q_2^2+q_3^2\ldots\ldots+q_m^2=\frac{n}{5.2^5}\;;\\
&q_1^3+q_2^3+q_3^3\ldots\ldots+q_m^3=\frac{n}{7.2^7}\;;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&q_1^m+q_2^m+q_3^m\ldots\ldots+q_m^m=\frac{n}{(2m+1)\,2^{2m+1}}\;.
\end{aligned}\right\}\ldots(42)$$

Naar nu atter den Ligning, hvori samtlige Værdier af q indtræde som Rødder, betegnes med:

$$q^m+c_1q^{m-1}+c_2q^{m-2}\ldots\ldots+c_m=0\;,$$

give de almindeligt bekjendte Relationer mellem Coefficienterne og Summerne af Røddernes Potentser umiddelhart:

$$\left.\begin{aligned}
&[q]+c_1=0\;;\\
&[q^2]+c_1[q]+2c_2=0\;;\\
&[q^3]+c_1[q^2]+c_2[q]+3c_3=0\;;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[q^m]+c_1[q^{m-1}]+c_2[q^{m-2}]\ldots\ldots+mc_m=0\;;
\end{aligned}\right\}\ldots(43)$$

hvorved disse Coefficienter med største Lethed bestemmes.

Lad os ogsaa her tage et specielt Exempel og sætte $n=5$, altsaa $m=2$. Systemet (43) bliver da:

$$\frac{5}{24}+c_1=0\;;$$

$$\frac{1}{32}+\frac{5}{24}c_1+2c_2=0\;;$$

altsaa:

$$c_1=-\frac{5}{24}\;;\quad c_2=\frac{7}{1152}\;.$$

q_1 og q_2 ere saaledes Rødder i Ligningen:

$$q^2-\frac{5}{24}q+\frac{7}{1152}=0\;,$$

og følgelig:

$$q_1=\frac{5-\sqrt{11}}{48}\;;\quad q_2=\frac{5+\sqrt{11}}{48}$$

eller:
$$a_1 = +\sqrt{\frac{5-\sqrt{11}}{48}}\,; \quad a_3 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{11}}{48}}\,;$$
$$a_2 = +\sqrt{\frac{5+\sqrt{11}}{48}}\,; \quad a_4 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{11}}{48}}\,;$$

samt: $a_5 = 0$.

Ved at sammenligne de mindre nøiagtige Cotes'iske Formler med de her behandlede, eller med de Gauss'iske, kan der vel til Fordeel for de første anføres, at alle Værdier af a ved dem stedse fremtræde som simple, rationale Brøker. Men dette er vistnok en uvæsentlig Omstændighed, som i de allerfleste Tilfælde endogsaa ganske maa frakjendes al virkelig Betydning. Skal man finde Værdierne af A ved en Beregning af Functionen y, maa man nemlig herved i Regelen gjøre Brug af de sædvanlige Tavler, og det er da fuldkommen ligegyldigt, om de med et vist begrændset Antal af Decimaler benyttede Argumenter ogsaa have den Egenskab at kunne lade sig fremstille i en simpel, rational Form. Og selv ved Problemets graphiske Behandling bliver Forholdet i Grunden det samme. Naar man oftere skal anvende en vis given Formel — og ved en enestaaende Anvendelse har Sagen kun ringe Vigtighed — vil man dog neppe nogensinde søge Delingspunkterne for Intervallet $\varDelta$ ved en directe geometrisk Construction, da man med langt større Fordeel kan benytte eet eller andet af de mangfoldige, hertil skikkede, graphiske Hjælpemidler, til Ex. en ligesidet Triangel, hvis ene Side er deelt efter de givne Forhold, idet alle Delingspunkter tillige ere forbundne med det modstaaende Hjørne ved et System af rette Linier. Men ved Benyttelsen af et saadant Hjælpemiddel er det indlysende, at enhver Forskjel mellem Letheden i at udføre den mere eller mindre vanskelige Inddeling ganske falder bort.

Det er en Selvfølge, at man ved Anvendelsen af (41) stedse bør foretrække de lige Værdier af n. Naar man nemlig fra et lige n gaaer til den paafølgende ulige Værdie, vil Nøiagtigheden kun modtage en forholdsviis ringe Forøgelse, da Ordenen for det første staaende Led i Rækken (23) vedbliver at være den samme, medens det kun er Coefficienten k, som noget formindskes. Gaaer man derimod atter til det næst paafølgende lige n, voxer Nøiagtigheden pludseligt med et stærkt Spring, idet Ordenen nu ikke blot stiger med to Eenheder, men Coefficienten tillige reduceres til en langt mindre Størrelse.

§ 9.

Vil man overhovedet have en klar Forestilling om de forskjellige Formlers Nøiagtighed, maa man ikke indskrænke sig til kun at anføre Ordenen for det første staaende Led i (23), men bør da ogsaa give Coefficienten k for dette Led. Den større Skarphed, der opnaaes ved en nøiagtigere Formel, viser sig nemlig ikke alene ved det større Antal af forsvindende Led i (23), men tillige, og ofte fortrinsviis, netop derved, at Coefficienterne for de paafølgende, ikke forsvindende Led reduceres til overmaade smaae Brøker. Ved enkelte Formler vil den ubegrændsede Forøgelse af Nøiagtigheden, som stedse maa følge med stadigt voxende Værdier af n, endogsaa udelukkende beroe paa denne Formindskelse af Coefficienterne, saaledes som dette til Ex. er Tilfældet med den Simpson'ske Formel, hvor det første staaende Led, selv for de største Værdier af n, dog altid vedbliver at være af 4de Orden.

Men for en hvilkensomhelst given Formel, hvor samtlige Værdier af a og R maae forudsættes bekjendte, vil denne Bestemmelse af Coefficienterne k ogsaa stedse directe kunne udføres, idet Ligningerne (24) give Coefficienternes Udtryk ved meget simple rationale og symmetriske Functioner af de alt bekjendte Størrelser. Ved den i § 7 exempelviis behandlede Cotes'iske Formel, hvor $n = 7$ og $m = 3$, bliver saaledes det første staaende Led i (23):

$$+k_8 K_8 ,$$

og (24) giver da:

$$k_8 = \frac{1}{9.2^8} - 2.\left(\frac{1}{6}\right)^8.\frac{9}{280} - 2.\left(\frac{2}{6}\right)^8.\frac{9}{35} - 2.\left(\frac{3}{6}\right)^8.\frac{41}{840} \;;$$

altsaa $k_8 = -\frac{1}{38880}$.

Ved alle de Cotes'iske Formler bliver Regningen forholdsviis let, da Størrelserne a og R ere rationale, men ved de andre Formler, hvor dette ikke finder Sted, kan denne directe Udledelsesmaade blive besværlig nok, ligesom den i hvert Fald, naar Størrelserne kun bestemmes med et vist Antal af Decimaler, vil medføre den Ulempe, ikke at kunne give de simple og skarpe Værdier af Coefficienterne, som stedse maae være rationale Brøker. Da det imidlertid er let at omgaae alle Vanskeligheder, skulle vi nærmere vise dette ved først at betragte de Gauss'iske Formler, hvor det første staaende Led for en hvilkensomhelst Værdie af n ganske almindeligt fremstilles ved:

$$+ k_{2n} K_{2n} \;,$$

idet Ligningerne (24) og (27) tillige give:

$$k_{2n} = \frac{1}{(2n+1)\,2^{2n}} - 2[q^n R] \;,$$

hvor det nu kun kommer an paa at finde Værdien af $[q^n R]$.

Men den samme Fremgangsmaade, der benyttedes til Udledelsen af Systemerne (35) og (36), kan aabenbart ogsaa anvendes til vedblivende at danne nye Ligninger af en tilsvarende Form, idet man bestandigt multiplicerer (34) med høiere og høiere Potentser af q. Systemet (35), hvor $n = 2m$, vil paa denne Maade kunne fortsættes med følgende Ligninger:

$$\left.\begin{array}{l} b_m c_m + b_{m+1} c_{m-1} \ldots\ldots\ldots + b_{2m-1} c_1 + [q^n R] = 0 \\ b_{m+1} c_m + b_{m+2} c_{m-1} \ldots\ldots [q^n R] c_1 + [q^{n+1} R] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (44)$$

som successive bestemme Størrelserne $[q^n R]$, $[q^{n+1} R]$, $[q^{n+2} R] \ldots$

For $n = 2m + 1$ fortsættes Systemet (36) paa lignende Maade med:

$$\left.\begin{array}{l} b_{m+1} c_m + b_{m+2} c_{m-1} \ldots\ldots + \;\; b_{2m} \;\; c_1 + [q^n R] = 0 \\ b_{m+2} c_m + b_{m+3} c_{m-1} \ldots\ldots + [q^n R] c_1 + [q^{n+1} R] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (45)$$

Ved det i § 5 behandlede Exempel, hvor $n = 5$, giver (45) saaledes:

$$\frac{1}{7.2^7}\cdot\frac{5}{336} - \frac{1}{9.2^9}\cdot\frac{5}{18} + [q^5R] = 0\ ;$$
$$\frac{1}{9.2^9}\cdot\frac{5}{336} - [q^5R]\cdot\frac{5}{18} + [q^6R] = 0\ ;$$
$$[q^5R]\cdot\frac{5}{336} - [q^6R]\cdot\frac{5}{18} + [q^7R] = 0\ ;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

hvoraf successive:

$$[q^5R] = \frac{5.71}{2^{11}.3^4.7^2}\ ;\ \ [q^6R] = \frac{5.521}{2^{13}.3^6.7^2}\ ;\ \ [q^7R] = \frac{25.5377}{2^{15}.3^8.7^3}\ ;\ \ldots\ldots$$

altsaa tillige:

$$k_{10} = \frac{1}{11.2^{10}} - 2[q^5R] = \frac{1}{2^4.3^4.7^2.11}\ ;$$
$$k_{12} = \frac{1}{13.2^{12}} - 2[q^6R] = \frac{29}{2^6.3^6.7^2.13}\ ;$$
$$k_{14} = \frac{1}{15.2^{14}} - 2[q^7R] = \frac{1219}{2^8.3^8.7^3.5}\ .$$

For den omhandlede Formel erholdes da herved Rækkeudviklingen:

$$F = F_0 + \frac{1}{698544}K_{10} + \frac{29}{29719872}K_{12} + \frac{1219}{2880541440}K_{14} + \ldots\ldots$$

Ved de i § 8 behandlede Formler vil det første staaende Led i (23) være af Ordenen $n + 2$, naar n er lige, og af Ordenen $n + 1$, naar n er ulige. I begge Tilfælde vil Leddet altsaa stedse kunne fremstilles ved:

$$+ k_{2m+2}K_{2m+2}\ ,$$

hvor atter:

$$k_{2m+2} = \frac{1}{(2m+3)\,2^{2m+2}} - \frac{2}{n}[q^{m+1}]\ .$$

Men Systemet (43) vil her, som bekjendt, kunne fortsættes med Ligningerne:

$$\left.\begin{array}{l} [q^{m+1}] + c_1[q^m] \ldots\ldots\ldots + c_{m-1}[q^2] + c_m[q] = 0 \\ [q^{m+2}] + c_1[q^{m+1}] \ldots\ldots + c_{m-1}[q^3] + c_m[q^2] = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}\ldots(46)$$

som successive give $[q^{m+1}]$, $[q^{m+2}]\ldots\ldots$, idet alle Summerne af de lavere Potentser, fra $[q]$ til $[q^m]$, ere bestemte ved (42).

For det i Paragraphen behandlede Exempel, hvor $n=5$, bliver saaledes den første af Ligningerne (46):

$$[q^3]-\frac{5}{24}\cdot\frac{1}{32}+\frac{7}{1152}\cdot\frac{5}{24}=0\ ,$$

altsaa:

$$[q^3]=\frac{5.29}{2^{10}.3^3}\ .$$

Man faaer følgelig:

$$k_{2m+2}=k_6=\frac{1}{7.2^6}-\frac{29}{2^9.3^3}=\frac{13}{2^9.3^3.7}\ ,$$

og det omhandlede Led vil da her være:

$$+\frac{13}{96768}K_6\ .$$

Ved den virkelige Anvendelse af en hvilkensomhelst Formel, hvor Functionen:

$$y=\varphi(t)=f(g+\tfrac{1}{2}\varDelta+\varDelta t)=f(x)\ ,$$

forudsættes at være bekjendt, kan man naturligviis ogsaa bestemme selve Coefficienten K, idet man ganske almindeligt har:

$$K_\mu=\frac{1}{1.2.3\ldots\mu}\cdot\left(\frac{\delta^\mu y}{\delta t^\mu}\right)_0=\frac{\varDelta^\mu}{1.2.3\ldots\mu}\cdot\left(\frac{\delta^\mu y}{\delta x^\mu}\right)_{g+\frac{1}{2}\varDelta}\ .$$

De vedføiede Indices angive, at Differentialcoefficienterne $\frac{\delta^\mu y}{\delta t^\mu}$ og $\frac{\delta^\mu y}{\delta x^\mu}$ maae tillægges de Værdier, som fremkomme ved Substitutionerne af respective:

$$t=0 \quad \text{og} \quad x=g+\tfrac{1}{2}\varDelta\ .$$

§ 10.

Da det for Anvendelserne kan være beqvemt at have en samlet Fremstilling af de forskjellige Formler, skulle vi nedenfor meddele en saadan for hver af de tre behandlede Hovedklasser, idet vi dog indskrænke os til de første Værdier af n indtil $n=6$ inclusive.

Som tidligere forklaret haves i alle de her anførte Formler, saavel for $n=2m$ som for $n=2m+1$:

$$a_{m+1}=-a_1\ ;\quad a_{m+2}=-a_2\ ;\ldots\ldots a_{2m}=-a_m\ .$$
$$R_{m+1}=R_1\ ;\quad R_{m+2}=R_2\ ;\ldots\ldots\ldots R_{2m}=R_m\ .$$

samt for $n = 2m + 1$ tillige:

$$a_{2m+1} = 0 \,.$$

I. De Cotes'iske Formler.

$$n = 2: \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \,; \\ R_1 = \dfrac{1}{2} \,. \end{cases}$$

$$n = 3: \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \,; \quad a_3 = 0 \,; \\ R_1 = \dfrac{1}{6} \,; \quad R_3 = \dfrac{2}{3} \,. \end{cases}$$

$$n = 4: \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{6} \,; \quad a_2 = \dfrac{1}{2} \,; \\ R_1 = \dfrac{3}{8} \,; \quad R_2 = \dfrac{1}{8} \,. \end{cases}$$

$$n = 5: \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{4} \,; \quad a_2 = \dfrac{1}{2} \,; \quad a_5 = 0 \,; \\ R_1 = \dfrac{16}{45} \,; \quad R_2 = \dfrac{7}{90} \,; \quad R_5 = \dfrac{2}{15} \,. \end{cases}$$

$$n = 6: \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{10} \,; \quad a_2 = \dfrac{3}{10} \,; \quad a_3 = \dfrac{1}{2} \,; \\ R_1 = \dfrac{25}{144} \,; \quad R_2 = \dfrac{25}{96} \,; \quad R_3 = \dfrac{19}{288} \,. \end{cases}$$

II. Formlerne: $F_0 = \dfrac{A_1 + A_2 \cdots + A_n}{n}$.

$n = 1$: $a_1 = 0$.

$n = 2$: $a_1 = 0{,}2886751$.

$n = 3$: $a_1 = 0{,}3535534$; $a_3 = 0$.

$n = 4$: $a_1 = 0{,}0937962$; $a_2 = 0{,}3973272$.

$n = 5$: $a_1 = 0{,}1872707$; $a_2 = 0{,}4162487$; $a_5 = 0$.

$n = 6$: $a_1 = 0{,}1333177$; $a_2 = 0{,}2112593$; $a_3 = 0{,}4331234$.

III. De Gauss'iske Formler.

For Værdierne $n = 1$ og $n = 2$ falde disse Formler fuldstændigt sammen med de ovenstaaende under II anførte:

$$\boldsymbol{n=3:}\left\{\begin{array}{ll} a_1 = 0{,}3872983\,; & a_3 = 0\,. \\ R_1 = \dfrac{5}{18}\,; & R_3 = \dfrac{4}{9}\,. \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{n=4:}\left\{\begin{array}{ll} a_1 = 0{,}1699905\,; & a_2 = 0{,}4305682\,. \\ R_1 = 0{,}3260726\,; & R_2 = 0{,}1739274\,. \\ \log R_1 = 9{,}5133143\,; & \log R_2 = 9{,}2403681\,. \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{n=5:}\left\{\begin{array}{lll} a_1 = 0{,}2692347\,; & a_2 = 0{,}4530899\,; & a_5 = 0\,. \\ R_1 = 0{,}2393143\,; & R_2 = 0{,}1184634\,; & R_5 = 0{,}2844444\,. \\ \log R_1 = 9{,}3789687\,; & \log R_2 = 9{,}0735843\,; & \log R_5 = 9{,}4539975\,. \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{n=6:}\left\{\begin{array}{lll} a_1 = 0{,}1193096\,; & a_2 = 0{,}3306047\,; & a_3 = 0{,}4662348\,. \\ R_1 = 0{,}2339570\,; & R_2 = 0{,}1803808\,; & R_3 = 0{,}0856622\,. \\ \log R_1 = 9{,}3691360\,; & \log R_2 = 9{,}2561903\,; & \log R_3 = 8{,}9327895\,. \end{array}\right.$$

For at lette Bedømmelsen af Formlernes Nøiagtighed give vi endnu i nedenstaaende Tableau for hver enkelt Formel det første staaende Led i Rækkeudviklingen (23). Til Sammenligning have vi dog ogsaa i en første Colonne medtaget den Simpson'ske Formel.

n	**Simpson.**	**I.**	**II.**	**III.**
1.	——	——	$+\frac{1}{12}K_2$	$+\frac{1}{12}K_2$
2.	——	$-\frac{1}{6}K_2$	$+\frac{1}{180}K_4$	$+\frac{1}{180}K_4$
3.	$-\frac{1}{120}K_4$	$-\frac{1}{120}K_4$	$+\frac{1}{480}K_4$	$+\frac{1}{2800}K_6$
4.	——	$-\frac{1}{270}K_4$	$+\frac{1}{3780}K_6$	$+\frac{1}{44100}K_8$
5.	$-\frac{1}{1920}K_4$	$-\frac{1}{2688}K_6$	$+\frac{13}{96768}K_6$	$+\frac{1}{698544}K_{10}$
6.	——	$-\frac{11}{52500}K_6$	$+\frac{1}{50400}K_8$	$+\frac{1}{11099088}K_{12}$

§ 11.

Lad os vise Anvendelsen af de forskjellige Formler, der fremstaae ved at sætte $n = 4$, paa Behandlingen af et meget simpelt Exempel, hvor Resultatet forud er bekjendt, idet vi søge Værdien for:

$$\int_{20}^{30} \frac{dx}{x} = \log.\text{nat.}\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}4054651 \ .$$

Substitutionen $x = 25 + 10t$ giver da:

$$\int_{20}^{30} \frac{dx}{x} = 10 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{dt}{25 + 10t} \ ,$$

hvor man nu ved Formlerne skal bestemme:

$$F = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{dt}{25 + 10t} = 0{,}04054651 \ .$$

Ved den Cotes'iske Formel haves:

$$\begin{aligned} A_1 R_1 &= 0{,}01406250 \\ A_3 R_3 &= 0{,}01607143 \\ A_2 R_2 &= 0{,}00416667 \\ A_4 R_4 &= 0{,}00625000 \\ \hline F_0 &= 0{,}04055060 \ . \end{aligned}$$

$$\text{Altsaa } F = F_0 - 0{,}00000409 \ .$$

Men det første staaende Led i (23) er ogsaa i dette Tilfælde:

$$-\frac{1}{270} K_4 \ ,$$

hvor K_4 med største Lethed kan bestemmes, da man her har:

$$y = x^{-1} \ ,$$

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = 1.2.3 \ldots \mu (-1)^\mu . x^{-(\mu+1)} \ ,$$

$$K_\mu = 10^\mu . (-1)^\mu . 25^{-(\mu+1)} = \frac{1}{25}\left(\frac{2}{5}\right)^\mu \cdot (-1)^\mu \ ,$$

og følgelig:

$$-\frac{1}{270} K_4 = -\frac{1}{270} \cdot \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = -0{,}00000379 \ .$$

Den tilsvarende Formel under II giver derimod:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 0{,}03855353 \\
A_3 &= 0{,}04155925 \\
A_2 &= 0{,}03451456 \\
A_4 &= \underline{0{,}04755851} \\
\text{Sum} &= 0{,}16218585\,, \\
F_0 &= 0{,}04054646\,, \\
\text{altsaa } F = F_0 &+ 0{,}00000005\,,
\end{aligned}
$$

og for det første staaende Led haves her:

$$+\frac{1}{3780}K_6 = +\frac{1}{3780}\cdot\frac{1}{25}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^6 = +0{,}00000004\ .$$

Ved den Gauss'iske Formel erholdes endelig:

$$
\begin{aligned}
A_1 R_1 &= 0{,}01221250 \\
A_3 R_3 &= 0{,}01399447 \\
A_2 R_2 &= 0{,}00593494 \\
A_4 R_4 &= \underline{0{,}00840460} \\
F_0 &= 0{,}04054651\ ,
\end{aligned}
$$

idet Rækken (23) endogsaa først begynder med Leddet:

$$+\frac{1}{44100}K_8 = +\frac{1}{44100}\cdot\frac{1}{25}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^8 = +0{,}00000000\,06\ .$$

Ved Anvendelsen af Formelen II behøvede man forøvrigt slet ikke at beregne de enkelte Værdier af A, idet Summen af dem alle umiddelbart fremstilles ved:

$$\frac{1}{25+10\sqrt{q_1}} + \frac{1}{25-10\sqrt{q_1}} + \frac{1}{25+10\sqrt{q_2}} + \frac{1}{25-10\sqrt{q_2}}$$

$$= \frac{2}{25-4q_1} + \frac{2}{25-4q_2} = \frac{100-8(q_1+q_2)}{625-100(q_1+q_2)+16q_1q_2}\ ,$$

hvor q_1 og q_2 ere Rødderne i den ved Formelens Udledelse benyttede Ligning af m^{te} Grad:

$$q^2 - \frac{1}{6}q + \frac{1}{720} = 0\ .$$

Man faaer saaledes:

$$F_0 = \frac{25-\frac{1}{3}}{625-\frac{50}{3}+\frac{1}{45}} = \frac{555}{13688} = 0{,}04054646\ ,$$

og det indsees tillige let, at man ved Formlerne II stedse paa lignende Maade, naar kun y er en rational Function af x, vil kunne udtrykke F_0 ved en rational Brøk, hvilket giver et ret mærkeligt Middel til at erholde approximative, rationale Værdier for en heel Deel transcendente Størrelser.

§ 12.

Naar Intervallet $\varDelta$ er saa stort, at en umiddelbar Anvendelse af de meddeelte Formler ikke længere kan bestemme Integralet med den fornødne Skarphed, vil man dog stedse kunne benytte enhver af disse Formler paa en Maade, som gjør det muligt at opnaae en hvilkensomhelst forlangt Nøiagtighed. Man behøver nemlig blot at opløse det forelagte Integral i en Sum af et tilstrækkeligt Antal Addender, hver enkelt svarende til et Stykke af det samlede Interval, og kan da successive anvende Formelen paa Bestemmelsen af samtlige Addender. Vi skulle her ganske almindeligt undersøge den Forøgelse af Nøiagtighed, der fremstaaer ved en Deling af Intervallet i p ligestore Stykker.

Ved denne Deling opløses Integralet:

$$F = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y dt$$

i de p Addender:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} y dt + \int_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{p}} y dt \,\ldots\ldots\ldots + \int_{-\frac{1}{2}+\frac{p-1}{p}}^{+\frac{1}{2}} y dt \quad ,$$

og betegner man nu med t_0 — for atter her at benytte det geometriske Billede — Abscissen for Midtpunktet af det mindre Interval $\frac{1}{p}$, der svarer til en hvilkensomhelst af Addenderne, saa vil Substitutionen:

$$t = t_0 + \frac{u}{p} \,,$$

forvandle den omhandlede Addend til:

$$\frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y du \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

hvor den givne Formel uforandret anvendes paa Bestemmelsen af $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y du$. Dersom man da her betegner det første staaende Led i Rækkeudviklingen (23) med:

$$+k_\mu K'_\mu \,,$$

vil det tilsvarende Led, naar Formelen umiddelbart anvendes paa Bestemmelsen af F, ogsaa være fremstillet ved:

$$+k_\mu K_\mu \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

idet man tillige har:

$$K'_\mu = \frac{1}{1.2.3\ldots\mu}\cdot\left(\frac{d^\mu y}{du^\mu}\right)_0 ; \quad K_\mu = \frac{1}{1.2.3\ldots\mu}\cdot\left(\frac{d^\mu y}{dt^\mu}\right)_0 .$$

Men:

$$\left(\frac{d^\mu y}{du^\mu}\right) = \left(\frac{1}{p}\right)^\mu\cdot\left(\frac{d^\mu y}{dt^\mu}\right) ,$$

altsaa:

$$K'_\mu = \left(\frac{1}{p}\right)^\mu\cdot K_\mu \;;$$

thi vel kan det bemærkes, at Differentialcoefficienten $\left(\frac{d^\mu y}{dt^\mu}\right)$ ved Bestemmelsen af K tages for $t = 0$, ved K' derimod for $t = t_0$, men denne Forskjel kan aabenbart kun yttre sin Indflydelse paa Leddene af de høiere Ordener.

Da Værdien af F erholdes ved at sammenlægge p Addender af Formen (47), maa det første staaende Led i (23), eller Correctionen for den samlede Sum, være udtrykt ved:

$$+p\cdot\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^\mu\cdot k_\mu K_\mu = +\left(\frac{1}{p}\right)^\mu\cdot k_\mu K_\mu \;\ldots\ldots \quad (49)$$

og den ved Integralets Deling opnaaede Forøgelse af Nøiagtighed fremtræder saaledes ved Multiplicationen af (48) med Factoren $\left(\frac{1}{p}\right)^\mu$, som for større Værdier af p og μ hurtigt synker ned under enhver given Grændse.

Den Simpson'ske Formel afgiver et bekjendt Exempel paa Anvendelsen af den omhandlede Fremgangsmaade. Denne Formel, hvor $n = 2m + 1$, fremstaaer nemlig ved en Deling af Intervallet i m ligestore Stykker, idet man for hvert enkelt af disse benytter den anden Cotes'iske Formel, der svarer til $n = 3$. Som Følge heraf vil da ogsaa Nøiagtigheden for den Simpson'ske Formel bestemmes ved:

$$-\frac{1}{120} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^4 K_4 = -\frac{1}{120 m^4} K_4 \ldots\ldots\ldots (50)$$

der angiver Correctionen for selve F_0, idet vi atter her udelade Factoren Δ.

I engelske Værker findes ofte en beslægtet Formel, som ligeledes tilskrives Simpson og fører Navn af »Simpson's second rule». Den forudsætter $n = 3p + 1$ og fremstaaer ved en Deling af Intervallet i p ligestore Stykker. Naar de tilsvarende enkelte Addender bestemmes ved den tredie Cotes'iske Formel, eller ved de cubiske Parabler, kommer man nemlig herved til et forholdsviis simpelt Udtryk for ΔF, nemlig:

$$\frac{\Delta}{8p}\left\{A_1 + 3A_2 + 3A_3 + 2A_4 + 3A_5 \ldots + 3A_{n-1} + A_n\right\} \ldots (51)$$

hvor Ordinaterne, ligesom i (2), ere betegnede efter den naturlige Rækkefølge fra venstre til høire gjennem hele Intervallet. Det har været almindeligt antaget, at denne »anden» Simpson'ske Formel ved samme Antal af Ordinater stedse maatte give en skarpere Bestemmelse end den sædvanligt benyttede Formel (2), og det er først for ganske kort Tid siden, at Mr. Merrifield i: »*Transactions of the Institution of naval Architects, Vol. VI, 1865*», har efterviist det Urigtige i denne Formening. Merrifield oplyser nemlig, at det netop omvendt er det til (2) svarende første staaende Led i (23), eller Correctionen f, som stedse bliver mindre end Correctionen f' for Formelen (51), idet man endogsaa har $f = \frac{4}{9} f'$. Om Rigtigheden af denne Paastand vil man ogsaa let kunne overbevise sig. Formel (49) giver nemlig her:

$$f' = -\frac{1}{270 p^4} K_4 .$$

Men naar n skal have en saadan Værdie, at man ogsaa kan anvende (2), maa p være lige, og man faaer da $m = \frac{3}{2}p$, altsaa ifølge (50):

$$f = -\frac{1}{120p^4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot K_4 .$$

hvoraf:

$$\frac{f}{f'} = \frac{270}{120} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{4}{9} .$$

Et lignende Forhold vil forøvrigt stedse indtræde, naar man paa samme Maade anvender hvilkesomhelst to paa hinanden følgende Cotes'iske Formler, af hvilke den første svarer til et ulige n. Correctionen f for Bestemmelsen af F ved Hjælp af den første Formel, hvor Intervallet forudsættes deelt i p ligestore Stykker, udtrykkes nemlig ved:

$$f = \left(\frac{1}{p}\right)^{n+1} \cdot k_{n+1} K_{n+1} .$$

Anvendes den anden faaer man derimod, idet f, p og k_{n+1} her betegnes ved Tilføielsen af et Mærke:

$$f' = \left(\frac{1}{p'}\right)^{n+1} \cdot k'_{n+1} K_{n+1} .$$

Men da man nødvendigviis maa have:

$$(n-1)p = np' ,$$

erholdes ganske almindeligt:

$$\left(\frac{f}{f'}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{k_{n+1}}{k'_{n+1}} .$$

For $n = 5$, eller ved Anvendelsen af den 4de og 5te Cotes'iske Formel, faaer man saaledes:

$$f = \left(\frac{4}{5}\right)^6 \cdot \frac{52500}{11.2688} f' = \frac{128}{275} f' .$$

§ 13.

Til Slutning skulle vi endnu tilføie den Bemærkning, at man stedse med største Lethed kan bestemme Nøiagtigheden for en hvilkensomhelst af de mangfoldige Formler, der give Værdien af Integralet (18) ved en lineær Function af n Ordinater. Man behøver nemlig blot at bringe det forelagte Udtryk paa den i § 4 benyttede Form, og kan da umiddelbart bestemme Coefficienterne k i Rækkeudviklingen (23) ved Hjælp af Ligningerne (24). Den engelske Mathematiker Boole *(A Treatise on the Calculus of finite differences, pag. 38)* anfører saaledes en meget simpel Formel, der skyldes Mr. Weddle, og som siges ganske særligt at udmærke sig ved sin Skarphed. Den antager stedse $n = 7$, idet Intervallet forudsættes deelt i 6 ligestore Stykker h, og den skrives hos Boole paa følgende Maade:

$$\frac{3h}{10}\left\{u_0 + u_2 + u_4 + u_6 + 5(u_1 + u_5) + 6u_3\right\},$$

hvor Ordinaterne fra venstre til høire ere betegnede med u_0, u_1, $u_2 \ldots . u_6$. Med Betegnelserne i § 4 vil den derimod forandres til:

$$\frac{\varDelta}{20}\left\{(A_1 + A_4) + 5(A_2 + A_5) + (A_3 + A_6) + 6A_7\right\},$$

idet man tillige har:

$$a_1 = -a_4 = \frac{1}{6}; \quad a_2 = -a_5 = \frac{1}{3}; \quad a_3 = -a_6 = \frac{1}{2}; \quad a_7 = 0;$$

$$R_1 = R_4 = \frac{1}{20}; \; R_2 = R_5 = \frac{1}{4}; \; R_3 = R_6 = \frac{1}{20}; \; R_7 = \frac{3}{10}.$$

Da Ligningerne (25) og (26) ere fyldestgjorte, forsvinde i (23) alle Coefficienter k med de ulige Indices, og Ligningerne (24) give endvidere:

$$k_0 = 0; \; k_2 = 0; \; k_4 = 0; \; k_6 = -\frac{1}{54432}; \; k_8 = -\frac{23}{699840}.$$

Man faaer altsaa ved denne Formel:

$$F = F_0 - \frac{1}{54432}K_6 - \frac{23}{699840}K_8 \ldots .$$

Men uagtet Formelen saaledes ganske vist maa siges at give en meget skarp Bestemmelse af F, vilde den Cotes'iske, der benytter de samme syv Ordinater, dog endnu have givet en skarpere Værdie, idet man ved den faaer:

$$F = F_0 - \frac{1}{38880}K_8 \ldots .$$